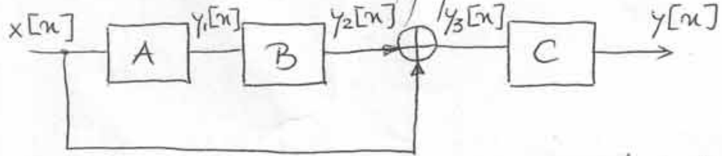
19 mai 2007

Problema 1 (Universitatea Tehnică Cluj)

Se consideră un sistem discret, liniar și invariant în timp, având schema bloc din figură.



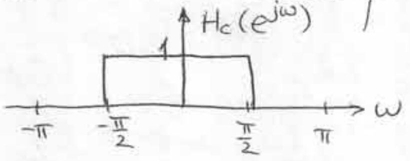
Despre sistemul A se cunosc următoarele:

1° Dacă $x[n]=1, \forall n$, atunci $y_1[n]=-2, \forall n$

2° Dacă $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, atunci $y_1[n]=2\delta[n]-\alpha(-2)^{1-n}u[n], \alpha\in\mathbb{R}$

Sistemul B are funcția pondere $h_B[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

Sistemul C este descris prin funcția de transfer din figură.



Se cer:

a) Să se determine constanta α și $h_A[n]$

b) Să se determine funcția de transfer a întregului sistem și să se reprezinte grafic caracteristicile de frecvență, notând pe axele de coordonate valorile semnificative.

c) Să se determine funcția pondere a întregului sistem.

d) Să se determine răspunsul $y[n]$ al sistemului la excitația

$$x[n]=\sum_{k=0}^{3}\sin\left(\frac{(2k+1)n\pi}{4}-\frac{5\pi}{8}\right)$$

Problema 2 (Universitatea Politehnica București)

Se dau semnalele:

$x_1(t) = \dfrac{\sin 2t}{t} \qquad x_2(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$

a) Să se calculeze și să se reprezinte grafic $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$

b) Să se găsească $\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = X_3(\omega)$ și să se reprezinte grafic spectrul de amplitudini asociat lui $X_4(\omega)$.

c) Să se calculeze energiile W_1, W_2, W_3 disipate de semnalele $x_1(t)$, $x_2(t)$ și respectiv $y(t)$ pe o rezistență de 1Ω.

d) Să se găsească valorile frecvenței de eșantionare a semnalului:

$g(t) = 2\dfrac{\sin \omega_m t}{\pi t}\cos \omega_1 t \quad , \omega_m = 4\pi \cdot 10^3\,rad/s,\ \omega_1 = 16\pi\cdot 10^3\,rad/s$

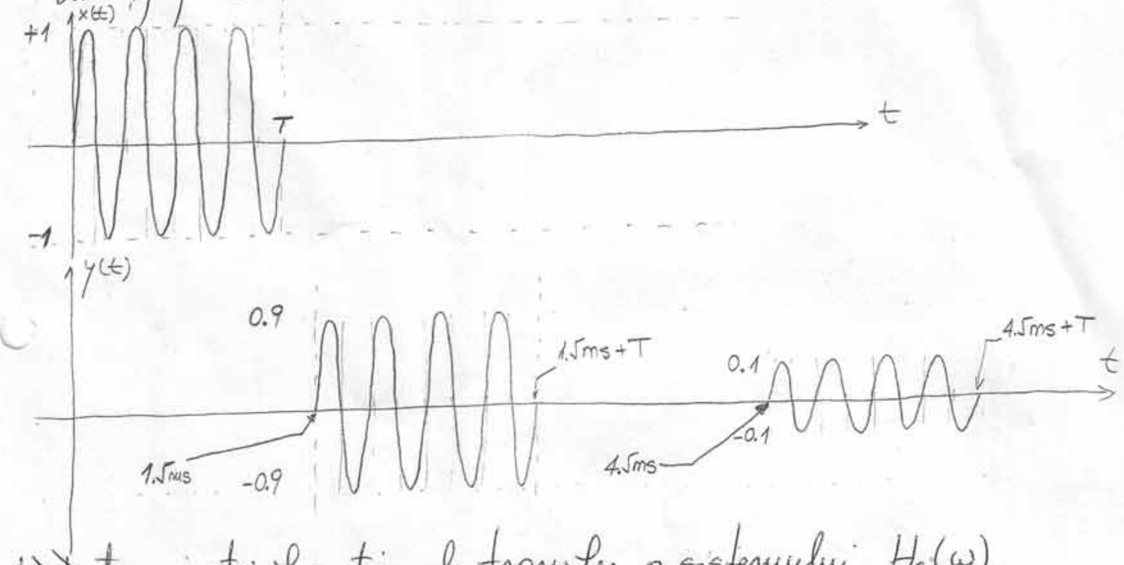
pentru care $g(t)$ mai poate fi refăcut din eșantioanele sale

e) Să se calculeze $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt$.

Problema 3 (Universitatea Politehnica Timișoara)

Un sistem liniar răspunde la semnalul $x(t)$ cu semnalul $y(t) = a x(t-t_0) + b x(t-t_1)$

a) Să se determine constantele a, b, t_0, t_1 pentru cazul particular din figură



b) Determinați funcția de transfer a sistemului, $H_s(\omega)$

c) Pentru a asigura refacerea semnalului, se intercalează un sistem de corecție, ca în figură, astfel încât la ieșire să apară semnalul $z(t) = x(t-t_0)$; Determinați răspunsul în frecvență $H_c(\omega)$ al sistemului de corecție, în funcție de $H_s(\omega)$.

$$y(t) \rightarrow \boxed{H_c(\omega)} \rightarrow z(t)$$

d) Considerând formula de aproximare de ordinul 2, $\frac{1}{1+u} \simeq 1-u+u^2$ (pe care vă rugăm să o demonstrați), valabilă pentru $|u| \ll 1$, arătați că $H_c(\omega)$ se poate aproxima prin

$$H_c(\omega) \simeq a_0 + a_1 e^{-j\omega\tau} + a_2 e^{-2j\omega\tau}, \quad \tau = t_1 - t_0$$ și determinați a_0, a_1, a_2.

e) Având în vedere forma aproximativă pentru $H_c(\omega)$, scrieți ecuația de legătură între $y(t)$ și $z(t)$.

f) Dați o implementare a sistemului de corecție, utilizând blocuri de întârziere cu τ, sumatoare, amplificatoare și/sau atenuatoare

REZOLVARE PROBLEMA 1

(a) Din 2° => semnale cauzale => aplicăm Transformata Z:

$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ (0,25p)

$y_1[n] = 2\delta[n] + 2\alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow Y_1(z) = 2 + \frac{2\alpha}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$ (0,25p)

$H_A(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)} = 2(1+\alpha) + z^{-1}$ (0,25p)

$\Rightarrow h_A[n] = 2(1+\alpha)\delta[n] + \delta[n-1]$ (0,25p)

Din 1° $\Rightarrow 1 * h_A[n] = -2 \Rightarrow 2(1+\alpha)+1 = -2 \Rightarrow \alpha = -2{,}5$ (0,5p)

$\Rightarrow h_A[n] = -3\delta[n] + \delta[n-1]$

(b) Fie $h_{AB}[n] = h_A[n] * h_B[n]$

$\Rightarrow h_{AB}[n] = -3h_B[n] + h_B[n-1] = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-2] =$

$= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \delta[n-1] = -\left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \delta[n-1] = -\delta[n-1]$ (1p)

La ieșirea sumatorului:

$y_3[n] = x[n] + x[n] * h_{AB}[n] = x[n] - x[n-1]$

$\Rightarrow Y_3(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1-e^{-j\omega}) \Rightarrow \frac{Y_3(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j\omega}$

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = (1-e^{-j\omega}) \cdot H_C(e^{j\omega})$ (0,5p)

$H_C(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$ - se repetă cu 2π

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1-e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$ - se rep. cu 2π

$1 - e^{-j\omega} = e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right) = e^{-j\frac{\omega}{2}} \cdot 2j \cdot \sin\frac{\omega}{2} = 2\sin\frac{\omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega-\pi}{2}}$

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\sin\frac{\omega}{2} \cdot e^{-j\frac{\omega-\pi}{2}}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$ - se repetă cu 2π (1p)

Caracteristica amplificării:

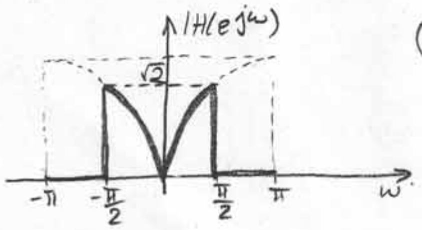
$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 2\left|\sin\frac{\omega}{2}\right|, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$ - se rep. cu 2π

Caracteristica defazajului:

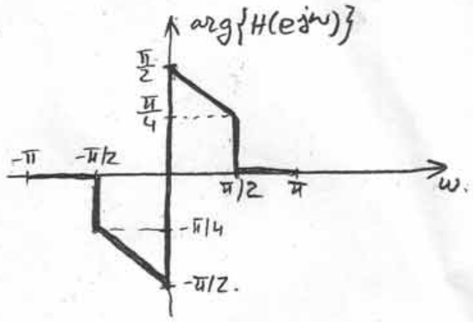
$\arg\{H(e^{j\omega})\} = \arg\left\{\sin\frac{\omega}{2}\right\} - \frac{\omega-\pi}{2}$

REZOLVARE PROBLEMA 1 (continuare)

$$\arg\left\{\sin\frac{\omega}{2}\right\}=\begin{cases}\pm\pi\ ,\ \omega\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\\ 0\ ,\ \omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow \arg\{H(e^{j\omega})\}=\begin{cases}-\frac{\omega+\pi}{2}\ ,\ \omega\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\\ -\frac{\omega-\pi}{2}\ ,\ \omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

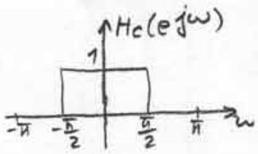


(1p)



(1p)

(c) Dacă $x[n]=\delta[n] \Rightarrow y[n]=h[n]=(\delta[n]-\delta[n-1]) * h_c[n]=$
$=h_c[n]-h_c[n-1]$



$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{H_c(e^{j\omega})\}=\frac{1}{2\pi}\cdot\pi\cdot Sa\left(\frac{\pi}{2}n\right)=\frac{1}{2}\,Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$ (1p)

Rezultă $h[n]=\frac{1}{2}\left[Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)-Sa\,\frac{(n-1)\pi}{2}\right]$ (0,5p)

(d) $x[n]=\sum_{k=0}^{3}\sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{4}-\frac{5\pi}{8}\right] \Rightarrow y[n]=\sum r_k\cdot\sin\left[\frac{(2k+1)n\pi}{4}+\varphi_k\right]$,

unde $r_k=|H(e^{j\omega_k})|$; $\varphi_k=-\frac{5\pi}{8}+\arg\{H(e^{j\omega_k})\}$; $\omega_k=\frac{(2k+1)\pi}{4}$ (0,25p)

- pt. $\omega_0=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}|H(e^{j\omega_0})|=2\sin\frac{\pi}{8}\\ \arg\{H(e^{j\omega_0})\}=\frac{3\pi}{8}\end{cases} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$ (0,5p)

- pt. $\omega_1=\frac{3\pi}{4}$, $\omega_2=\frac{5\pi}{4} \Rightarrow |H(e^{j\omega_{1,2}})|=0$ (0,25p)

- pt. $\omega_3=\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}|H(e^{j\omega_3})|=2\sin\frac{\pi}{8}\\ \arg\{H(e^{j\omega_3})\}=-\frac{3\pi}{8}\end{cases} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\sin\left(\frac{7n\pi}{4}-\pi\right)$ (0,5p)

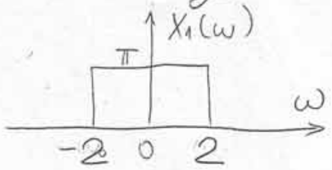
Rezultă:

$$y[n]=2\sin\frac{\pi}{8}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{7n\pi}{4}-\pi\right)\right]$$

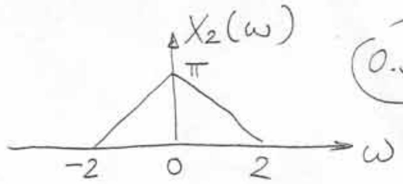
Oficiu (1p)

Problema 2 - rezolvare (1 pct)

a)



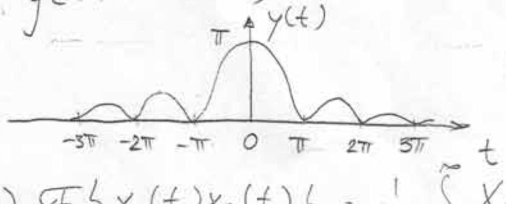
(0.5p)



(0.5p)

$$Y(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = \pi X_2(\omega)$$ (0.5p)

$$y(t) = \pi x_2(t)$$



(0.5p)

b) $$\mathcal{F}\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\lambda)X_1(\omega-\lambda)\,d\lambda = X_3(\omega)$$ (0.5p)

1) $\omega+2 < -2 \Rightarrow \omega < -4 \Rightarrow X_3(\omega) = 0$

2) $-2 \le \omega+2 \le 0 \Rightarrow -4 \le \omega \le -2,\ X_3(\omega) = \frac{\pi}{8}(\omega+4)^2$

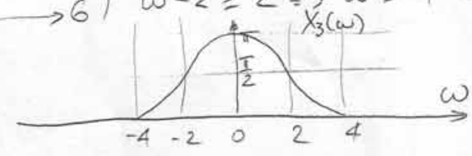
3) $0 \le \omega+2 \le 2 \Rightarrow -2 \le \omega \le 0,\ X_3(\omega) = \frac{\pi}{4}\left(4-\frac{\omega^2}{2}\right)$

4) $-2 \le \omega-2 \le 0 \Rightarrow 0 \le \omega \le 2,\ X_3(\omega) = \frac{\pi}{4}\left(4-\frac{\omega^2}{2}\right)$

5) $0 \le \omega-2 \le 2 \Rightarrow 2 \le \omega \le 4,\ X_3(\omega) = \frac{\pi}{8}(\omega-4)^2$

6) $\omega-2 \ge 2 \Rightarrow \omega \ge 4 \Rightarrow X_3(\omega) = 0$

(0.5p) (0.5p) (0.5p)

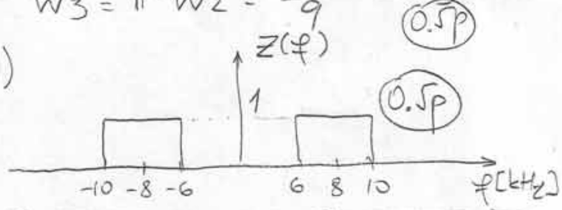


(0.5p)

c) $$W_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}|X_1(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\ [J],\quad W_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}|X_2(\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{9}\ [J]$$ (0.5p) (0.5p)

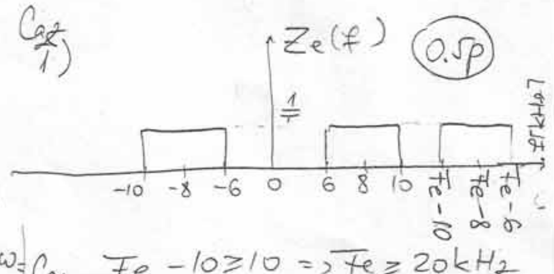
$$W_3 = \pi^2 W_2 = \frac{2\pi^3}{9}\ [J]$$ (0.5p)

d)



(0.5p)

Caz 1)



(0.5p)

e) $$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\pi\int_{-2}^{2}X_2(\omega)\,d\omega = \pi$$ (1p)

Caz 1) $Fe - 10 \ge 10 \Rightarrow Fe \ge 20\,kHz$

2) $Fe - 10 \ge 0,\ Fe - 6 \le 6$

$\Rightarrow Fe \in [10, 12]\ [kHz]$

$Fe \in [10, 12] \cup [20, \infty]\ kHz$

(1p)

Problema 3 - rezolvare

Start .... (1p)

a) Rezultă imediat $a=0.9$, $b=0.1$, $t_0=1.5ms$, $t_1=4.5ms$ .... (0.5p)

b) $Y(\omega)=ae^{-j\omega t_0}X(\omega)+be^{-j\omega t_1}X(\omega)$ şi deci .... (0.5p)

$$H_S(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=ae^{-j\omega t_0}+be^{-j\omega t_1}=0.9e^{-j\omega 1.5\cdot 10^{-3}}+0.1e^{-j\omega 4.5\cdot 10^{-3}} \quad \text{(0.5p)}$$

c) $Z(\omega)=H_c(\omega)Y(\omega)=e^{-j\omega t_0}X(\omega)$ .... (0.5p)

$$\Rightarrow H_c(\omega)=\frac{Z_1(\omega)}{Y(\omega)}=\frac{e^{-j\omega t_0}}{Y(\omega)/X(\omega)}=\frac{e^{-j\omega t_0}}{H_S(\omega)} \quad \text{(0.5p)}$$

$$H_c(\omega)=\frac{e^{-j\omega t_0}}{ae^{-j\omega t_0}+be^{-j\omega t_1}}=\frac{e^{-j\omega 1.5\cdot 10^{-3}}}{0.9e^{-j\omega 1.5\cdot 10^{-3}}+0.1e^{-j4.5\cdot 10^{-3}\omega}} \quad \text{(1p)}$$

d) $f(u)=\frac{1}{1+u}\simeq f(0)+\frac{u}{1!}f'(0)+\frac{u^2}{2!}f''(0)$, dacă $|u|\ll 1$ .... (0.5p)

atunci u^3, u^4 sunt neglijabile

$f(0)=1$, $f'(0)=-1$, $f''(0)=2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+u}\simeq 1-u+u^2 \quad \text{(0.5p)}$$

$$H_c(\omega)=\frac{1}{a+be^{j\omega(t_1-t_0)}}=\frac{1}{a}\,\frac{1}{1+\frac{b}{a}e^{-j\omega\tau}} \quad \text{(1p)}$$

Dar $\left|\frac{b}{a}e^{-j\omega\tau}\right|=\left|\frac{b}{a}\right|\ll 1$

$$\Rightarrow H_c(\omega)\simeq\frac{1}{a}\left(1-\frac{b}{a}e^{-j\omega\tau}+\frac{b^2}{a^2}e^{-2j\omega\tau}\right)=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}e^{-j\omega\tau}+\frac{b^2}{a^3}e^{-2j\omega\tau} \quad \text{(1p)}$$

$\Rightarrow a_0=\frac{1}{a}$, $a_1=-\frac{b}{a^2}$, $a_2=\frac{b^2}{a^3}$, adică $a_0=1.111$, $a_1=-0.123$, $a_2=0.014$ (0.5p)

$\tau=3\cdot 10^{-3}s$

e) $Z_1(\omega)=a_0Y(\omega)+a_1e^{-j\omega\tau}Y(\omega)+a_2e^{-2j\omega\tau}Y(\omega)$ .... (0.5p)

$z(t)=a_0y(t)+a_1y(t-\tau)+a_2y(t-2\tau)$ .... (0.5p)

$z(t)=1.111y(t)-0.123y(t-\tau)+0.014y(t-2\tau)$ .... (0.5p)

f)

(0.5p)